# ELEMENTI

DI

# PROSPETTIVA LINEARE

DI

GIOVANNI ASTOLFI

MILANO
COI TIPI DI G. B. BIANCHI E C.°
1825.

# ELEMENTI

DI

# PROSPETTIVA LINEARE

DI

GIOVANNI ASTOLFI

MILANO
COI TIPI DI G. B. BIANCHI E C.°
M. DCCC. XXV.

# AVVERTIMENTO

La presente operetta, che deve essere considerata come il seguito dell' altra intitolata: *Metodi pratici per determinare i contorni delle ombre ordinarie*, contiene le principali proposizioni relative alla Prospettiva lineare, esposte colle corrispondenti regole pratiche e rispettive dimostrazioni dipendenti dalle prime nozioni di Geometria Descrittiva.

NB. *Nel richiamare i varj Problemi dell' operetta citata ci serviremo per brevità del segno* M. P.

# ELEMENTI
## DI PROSPETTIVA LINEARE

### DEL CONTORNO APPARENTE.

Se da un punto $A$, (Fig. 1) ove supporremmo collocato l'occhio dell'Osservatore che considera un Corpo qualunque $BFDG$, si conduce una tangente $AB$, e si faccia questa muovere intorno al punto $A$ in modo che tocchi costantemente il corpo dato, si otterrà su questo una linea $BCDE$ che sarà il *Contorno Apparente del punto di vista A*.

### PROBLEMA 1.°

Data la pianta $BAD$, (Fig. 2) e l'alzato $fcg$ di un cono qualunque, e data la pianta $V$, e l'alzato $v$ del punto di vista, trovare il contorno apparente del cono dato.

Dai punti $V$, $v$ si tirino le $VCN$, $vcn$, e dal punto $n$ la $nN$ perpendicolare ad $ML$. Si conducano dal punto $N$ le rette $NB$, $ND$ tangenti la curva $DAB$, si uniscano i punti $B$, $D$ col punto $C$, e si avrà colle rette $BC$, $CD$ e colla curva $DAB$ la pianta del contorno apparente cercato; così segnati nell'alzato i punti $b$, $d$ corrispondenti ai $B$, $D$ e condotte le $cb$, $cd$ si otterrà l'alzato del medesimo contorno.

*Dimostrazione.*

Essendo il contorno apparente del cono determinato da due piani tangenti al medesimo condotti dal punto di vista, passeranno questi pel vertice del cono, e la loro comune intersezione sarà nella linea *VC*, *vc*, per cui nelle due *NB*, *ND* si avrà l'intersezione de' suddetti piani col piano della pianta, nelle *BC*, *CD*, *DAB* la pianta del contorno cercato.

## PROBLEMA 2.°

Data la pianta *ARCD*, (Fig. 3) e l'alzato *abcd* di un cilindro qualunque, e data la pianta *V*, e l'alzato *v* del punto di vista, determinare il contorno apparente del cilindro dato.

Dai punti *V*, *v* si tirino le *VN*, *vM* rispettivamente paralelle ai lati *AR*, *ab*, indi *MN* perpendicolare ad *ML*. Dal punto *N* condotte le *NP*, *NF* tangenti la curva *APD*, e pei punti *P*, *F* le *PQ*, *FH* paralelle ad *AR* si avrà (per essere il punto *v* superiore al piano *bc*) il contorno apparente determinato dalla base superiore *RHCQ* dalle linee *PQ*, *FH* e dalla curva *PAF*. Così condotte nell' alzato le due *pq*, *fh* corrispondenti alle *PQ*, *FH* determineranno in questo il medesimo contorno cercato.

## OSSERVAZIONE.

Se il cilindro sarà retto, si condurranno le tangenti immediatamente dal punto *V*.

*Dimostrazione.*

Intersecandosi i due piani tangenti il cilindro condotti dal punto di vista in una linea paralella al lato di esso, sarà $N$ il punto ove questa linea incontrerà il piano della pianta, quindi le due $NF$, $NP$ saranno le intersezioni dei piani tangenti col piano suddetto, e le $PQ$, $FH$ le cercate.

## PROBLEMA 3.°

Data la pianta $BXD$, (Fig. 4) e l'alzato $bxd$ di una sfera, e data la pianta $V$, e l'alzato $v$ del punto di vista, trovarne il contorno apparente.

Si unisca il centro $C$ col punto $V$, indi per l'altro centro $c$ si tiri $ca$ paralella ad $ML$, e s'innalzi dal punto $V$ la $VA$ perpendicolare a $VC$ ed eguale a $va$. Condotte dal punto $A$ le tangenti $AB$, $AD$, si calino le $BF$, $DE$ perpendicolari sulla $VC$, si divida per metà la $FE$ nel punto $G$, e si conduca $HN$ perpendicolare a $VC$ ed eguale alla distanza $BD$. Descritto col Problema III M. P. l'ellisse avente per diametri le $HN$, $FE$ sarà questo la pianta del contorno cercato.

Per avere l'alzato del medesimo contorno si condurrà $CP$ paralella ad $ML$, indi $vp$ perpendicolare a $cv$ ed eguale a $VP$, e si farà pel punto $p$ ciò che si è fatto pel punto $A$.

*Dimostrazione.*

S'innalzi il piano della pianta nel piano orizzontale condotto pel centro della sfera in modo che il punto $C$ si trovi nel centro di essa, ed il punto $V$ nella verticale elevata dallo stesso punto $V$, indi si faccia ruotare il cerchio $BXD$, e la retta $VA$

intorno alla $VC$ in modo che si dispongliino verticalmente. In quella posizione il punto $A$ coinciderà col punto di vista, ed il contorno apparente sarà determinato dal cerchio che ha per diametro $BD$, per cui la sua projezione sarà l' ellisse col diametro minore $FE$, e col diametro maggiore eguale alla stessa $BD$ come si è detto.

## PROBLEMA 4.°

Data la pianta $ATBS$, (Fig. 5) e l' alzato $mdnf$ di un toro, e data la pianta $V$ e l' alzato $v$ del punto di vista trovare il contorno apparente del toro dato.

Si unisca il centro $R$ col punto $V$, e dal centro $r$ si tiri $ra$ paralella ad $ML$, si descriva sulla $VR$ il semicerchio $RSV$, si seghi $AT$ eguale ad $AS$, e saranno $S$, $T$ la pianta di due punti del contorno cercato, e nella $mn$ si avranno gli alzati $s$, $t$ dei medesimi punti. Dal punto $C$ si tiri $CE$ perpendicolare a $CR$ ed eguale a $CA$; indi descrivasi il semicerchio $EAF$, e altrettanto si faccia pel punto $D$.

Pel centro $R$ si tiri una retta qualunque $RO$, si seghi $RH$ eguale ad $RO$, s' innalzi $HN$ perpendicolare a $VR$ ed eguale a $va$, e dal punto $N$ condotte le tangenti $NG$, $NX$ si calino le $GQ$, $XY$ perpendicolari ad $AB$: prese le parti $RQ'$, $RY'$ rispettivamente eguali ad $RQ$, $RY$ si avranno in $Q'$, $Y'$ la pianta di altri due punti del contorno cercato. Guidata pel punto $Q'$ la $Q'q$ perpendicolare ad $ML$, e posta la $qg$ eguale alla $QG$, si avrà l' alzato del punto $Q'$, e nella stessa guisa si otterrà l' alzato del punto $Y'$. Fatto l' angolo $ARQ''$ eguale ad $ARQ'$, e segate le parti $RQ''$, $RY''$ eguali alle $RQ'$, $RY'$ si avranno la pianta

e quindi l'alzato di altri due punti; se si condurrà $VP$ perpendicolare a $VR$ ed eguale a $va$, e si eseguirà pel punto $P$ l'operazione fatta pel punto $N$, si avranno i due punti corrispondenti al diametro $AB$, uno de' quali sarà il più basso e l'altro il più elevato, così fatta la $RZ$ perpendicolare ad $AB$ ed eguale a $va$, e condotte le tangenti si avranno i due punti pel diametro $ZK$.

La medesima regola serve per qualunque superficie di rotazione convessa.

## OSSERVAZIONE I.

Se invece del toro $mdnf$ sarà dato il solo ovolo $mfn$, e questo situato al dissopra del punto di vista, se ne avrà il contorno apparente eseguendo precisamente la medesima costruzione, e descrivendo soltanto la porzione di curva $SYT$ la quale assieme all' arco circolare $SAT$ ed alla base inferiore dell' ovolo costituirà l' intiero contorno cercato.

## OSSERVAZIONE II.

Servirà la stessa regola per trovare il contorno apparente di un toro in un archivolto (Fig. 6), avvertendo di continuare gli archi $ba$, $rg$ in $m$, $n$, descrivere i semicerchi sui diametri $mn$, $fe$, e segare le $v'p'$, $v''p''$ ec. eguali a $VP$, come si scorge dall' ispezione della figura. Dall' alzato se ne otterrà la pianta colle solite norme generali.

Se invece di un toro sarà dato un ovolo, il suo

contorno apparente si ridurrà alla sola porzione compresa fra $a$, $b$, e questa si avrà descrivendo col centro $m$ e raggio $mn$ un quarto di cerchio, e operando pel resto come si è detto.

*Dimostrazione.*

S' immagini collocato il piano della pianta nel piano orizzontale condotto pel centro del toro, come nella dimostrazione della proposizione precedente, e si consideri la sezione verticale lungo la $RO$, e la sua tangente condotta dal punto di vista: è chiaro che la projezione di questa tangente nel piano della $RO$ sarà la tangente condotta alla medesima sezione dall' estremo della verticale elevata nel punto $O$ ed eguale a $va$, per cui il semicerchio $EAF$ e la retta $HN$ potranno rappresentare questa sezione, ed il punto $Q$ corrisponderà al punto $Q'$ cercato, come si è detto.

PROBLEMA 5.°

Data la pianta e l' alzato di una porzione di colonna spirale non rastremata, la pianta e l' alzato dell' Elice direttrice, e del punto di vista trovarne il contorno apparente.

Condotta la tangente $VA$ (Fig. 7) ed il raggio $DA$ si tiri $Aaa'$ perpendicolare ad $ML$, e fissati tutti i punti $y$, $y'$, ec. corrispondenti alla pianta $Y$ si tirino le $ya$, $y'a'$, ec. paralelle ad $ML$, ed i punti $a$, $a'$ ec. saranno tanti punti del contorno cercato. Ripetuta la stessa operazione per la tangente $VB$ si otterranno dei punti appartenenti all' altro estremo del medesimo contorno. Dal punto $h$ preso nella $Dm$ si tiri $hK$ tangente la curva dell' Elice, e dal punto $v$ si conduca $vp$

paralella ad $h\,K$: fissata quindi qualunque sezione orizzontale $z\,n\,x$, si trovi il punto $N$ corrispondente ad $n$, si descriva col centro $N$ e col raggio della colonna il cerchio $S\,Z\,R$, e si guidi la $D\,N$, si conduca $V\,P$ perpendicolare a $D\,N$ ed eguale a $q\,p$, e dal punto $P$ le tangenti $P\,R$, $P\,S$ ed i punti $R$, $S$ coi corrispondenti $r$, $s$ segneranno la pianta e l' alzato di due punti richiesti.

## OSSERVAZIONE.

Se la sezione $x\,z$ si fisserà al dissotto del punto $v$, la retta $V\,P$ dovrà prendersi in senso opposto, cioè nella direzione $V\,T$, e se la sezione passerà per $v$ le tangenti $P\,R$, $P\,S$ si condurranno dal punto $V$.

### *Dimostrazione.*

Potendo il cerchio $A\,B$ rappresentare la pianta di un cilindro retto, che involge la colonna spirale, tutti i punti di essa colonna corrispondenti ai due $A$, $B$ saranno nel contorno apparente, e siccome l' altezza dei punti di detta colonna projetati in $A$ è eguale a quella dei punti dell' Elice projetati in $y$, così saranno $a$, $a'$ ec. gli alzati del punto $A$.

Guidati dal punto di vista due piani tangenti la colonna nella sezione $x\,z$ s' intersecheranno questi in una retta paralella alla tangente condotta all' Elice dal punto $n$, per essere tutte le paralelle alla suddetta tangente in $n$ tirate dai varj punti del contorno della sezione $x\,z$ altrettante tangenti alla colonna, quindi l' ortografia dell' accennata intersezione dei piani tangenti sarà la $V\,P$ paralella alla tangente condotta in $N$ e per essere tutte le tangenti all' Elice egualmente inclinate al piano della pianta, e $V\,P$ eguale a $q\,p$ sarà $P$ l' ortografia del punto dove l'anzidetta

intersezione incontra il piano orizzontale $qx$, dunque le $PR$, $PS$ determineranno due punti del contorno apparente cercato come dovevasi dimostrare.

## DELLA PROSPETTIVA DETERMINATA
### COL METODO GENERALE.

Unendo il punto di vista $V$ (Fig. 8) con tutti i punti del contorno apparente $ABCD$ di un oggetto, si otterrà una superficie conica, segata questa con una superficie qualunque $MN$, si avrà una linea $abcd$ che sarà la prospettiva del contorno $ABCD$ ossia dell' oggetto considerato. La superficie $MN$ che generalmente è piana dicesi *quadro*.

### PROBLEMA 6.°

Data la pianta $A$, e l'alzato $a$ (Fig. 9) di un punto, e data la pianta $V$ e l' alzato $v$ del punto di vista, trovare la prospettiva del punto dato supponendo il piano del quadro disposto verticalmente nella $CD$ condotta perpendicolare ad $ML$.

Si tirino le $VA$, $va$, si prolunghi $CD$ e condotta $NP$ perpendicolare a $CD$ ed eguale a $Cp$ sarà $P$ la prospettiva cercata.

### OSSERVAZIONE.

Se il punto obbiettivo si troverà nel piano della pianta sarà $b$ il suo alzato, per cui segata $NR$ eguale a $Cr$, sarà $R$ il punto cercato.

### *Dimostrazione.*

Condotto un piano verticale per la retta che unisce il punto di vista col punto dato, intersecherà questo nella $VA$ il piano della pianta, e sarà quindi nell' estremo della verticale elevata dal punto $N$ ed eguale a $Cp$ il punto cercato; dunque ec.

## PROBLEMA 7.°

Data la pianta $ACBN$, (Fig. 10) e l' alzato $pq$ di un cerchio orizzontale, la pianta $V$ e l' alzato $v$ del punto di vista, e la posizione $MD$ del piano del quadro, trovare la prospettiva del cerchio dato.

Dal punto $V$ si tirino le tangenti $VA$, $VB$, si divida per metà la $FH$ nel punto $G$ e si conduca $VGN$, si trovino gli alzati $a$, $b$, $n$ dei punti $A$, $B$, $N$ si conducano le $va$, $vb$, $vn$ e si trasporti il supposto piano $MD$ in $M'D'$ affine d' evitare la confusione delle linee che caderebbero nella pianta del cerchio: pei punti $F$, $G$, $H$ si guidino le $FF'$, $GG'$, $HH'$, tutte paralelle ad $ML$, si seghino le parti $F'A'$, $H'B'$ eguali alle $Mf$, $Mh$, si uniscano i punti $A'$, $B'$, e si avrà un diametro della prospettiva cercata, così segata la $G'N'$ eguale ad $Mg$, e presa $OQ$ eguale ad $ON'$ sarà $N'Q$ un altro diametro della medesima prospettiva.

Per ottenere quanti punti si vogliano dell' ellisse rappresentante la prospettiva del cerchio dato, si descriverà sul diametro $A'B'$ il semicerchio $A'PB'$, si condurrà $OP$ perpendicolare ad $A'B'$, e si uniranno i punti $Q$, $P$. Fatto ciò per un punto qualunque $R$ del diametro $A'B'$ si tireranno le $RS$, $RT$, indi $ST$ paralelle alle $OP$, $OQ$, $PQ$, e si avrà così un punto

$T$ del semiellisse $A'QB'$, e praticata la stessa operazione per descrivere il semiellisse $A'N'B'$ si otterrà tutto l' ellisse cercato.

### OSSERVAZIONE I.

Se invece di un cerchio sarà dato un' ellisse servirà la medesima regola per averne la prospettiva.

### OSSERVAZIONE II.

Nel caso che il cerchio dato sia verticale, essendo la sua pianta una retta eguale al diametro, se ne avrà la prospettiva unendone gli estremi col punto $V$ ed eseguendo nel resto l' operazione già superiormente praticata.

*Dimostrazione.*

Essendo la prospettiva del dato cerchio un' ellisse e le linee $F'A'$, $H'B'$ tangenti al medesimo sarà $A'B'$ un diametro, $O$ il suo centro ed $N'Q$ il diametro conjugato; dunque ec.

### PROBLEMA 8.°

Data la pianta $AEB$ (Fig. 11) e l' alzato $fcg$ di un cono qualunque, e dato la pianta $V$, e l' alzato $v$ del punto di vista, trovare la prospettiva del cono dato, supponendo il piano del quadro disposto come nel Problema antecedente.

Colla regola del Problema 1.° si trovi la pianta $ACE$, e l' alzato $ace$ del contorno apparente, e col

Problema II M. P. si trovi la porzione d' ombra propria $CB$ che cade nel detto contorno (*). Si trasporti, come si è fatto nel Problema antecedente, il supposto piano $MD$ in $M'D'$, si tirino le linee $VA$, $va$, si conduca $XX'$, si seghi la parte $X'A'$ eguale ad $Mx$, e sarà $A'$ la prospettiva del punto $A$; si ripeta la medesima operazione per $E$, $C$, $B$, e per alcuni punti dell' arco $EBA$, il quale potrebbesi anche descrivere colla regola del Problema antecedente, e si otterrà con ciò la prospettiva $A'C'E'B'$ cercata.

## OSSERVAZIONE

Siccome le tangenti $OB$, $OF$, che secondo il citato Problema II M. P. determinano gli estremi dell' ombra propria, comprendano anche l' ombra che porta il cono sul piano della pianta, così trovata la prospettiva dei tre punti $F$, $O$, $B$, ossia delle rette $OF$, $OB$, e marcate le parti che cadono al difuori della $E'C'$ si avrà la prospettiva di quest' ombra.

## PROBLEMA 9.°

Data la pianta $ABCN$ (Fig. 12) e l' alzato $abcn$ di un cilindro qualunque e data la pianta $V$ e l' alzato $v$ del punto di vista, trovare la prospettiva del cilindro dato.

---

(*) In qualunque Problema sarà sempre necessario di considerare tanto l' ombra visibile, che la trasparente, e segnare soltanto quella porzione che cade nel contorno apparente.

Si determini col Problema 2.° il contorno apparente del cilindro, e sia questo compreso dalle rette $EF$, $GH$, dalla curva $GOE$, e da tutto il perimetro superiore $BPF$; si segni col Problema I M. P. l'ombra propria $OP$ che cade nel contorno apparente, e colla seconda parte Problema XXXV M. P. si trovi l' ombra $OQR$ che il cilindro porta sul piano della pianta. Condotte le due $VE$, $ve$ si tiri $XX'$ paralella ad $ML$, si seghi $X'E'$ eguale ad $Mz$, e si avrà in $E'$ la prospettiva del punto $E$, si ripeta convenientemente questa operazione per alcuni punti del già nominato contorno apparente per l' ombra propria $OP$ e per l'ombra portata $OQR$, e si avrà la prospettiva cercata.

## OSSERVAZIONE.

Per le due basi del cilindro e per la parte $RQ$ potrà servire il Problema 7.°

## PROBLEMA 10.°

Data la pianta $ANC$, (Fig. 13) e l' alzato $anc$ di una sfera, e data la pianta $V$ e l' alzato $v$ del punto di vista, trovarne la prospettiva.

Si descriva col Problema 3.° la pianta $ABCE$ e l' alzato $abce$ del contorno apparente, e col Problema IV M. P. si segni la pianta $BQE$ e l' alzato $bqe$ di quella porzione d' ombra propria che cade nel contorno apparente: fissati poscia due punti corrispondenti $B$, $b$, ed eseguita la solita costruzione, si otterrà la prospettiva $B'$, e così si farà degli altri punti del con-

torno apparente dell' ombra propria e dell' ombra portata, che si segnerà col Problema XLI M. P.

## OSSERVAZIONE.

I due punti $B$, $b$ e i due $E$, $e$ possono servire per fissare la corrispondenza fra i varj punti della pianta e dell' alzato.

## PROBLEMA 11.°

Data la pianta $ACB$ (Fig. 14) e l' alzato $abco$ di un toro, e la pianta $V$ e l' alzato $v$ del punto di vista, trovarne la prospettiva.

La prospettiva cercata sarà composta della base superiore $HFG$, del contorno apparente $ANCQA$ trovato col Problema 4.°, e della porzione $EKR$ d'ombra propria Problema VI M. P. che trovasi nel contorno apparente, le quali si avranno mediante la più volte ripetuta operazione ec.

Nello stesso modo si potrà avere la prospettiva di un toro, o di un ovolo in un archivolto, e della colonna spirale.

## PROBLEMA 12.°

Data la pianta $BDC$, $HPN$ (Fig. 15) e l' alzato $pxsm$ di un imoscapo, la pianta $V$ e l' alzato $v$ del punto di vista, trovarne la prospettiva.

Dal punto $V$ condotte le tangenti $VN$, $VH$, si trovino gli alzati $n$, $h$ dei punti $N$, $H$, indi le pro-

spettive $N'$, $H'$: fatto ciò si prenda nella curva $sgm$ qualunque punto $g$, e si tirino la $gq$ tangente la curva $sgm$ e la $gr$ paralella ad $ML$, si guidi pei punti $v$, $q$ la $vqr$ e dal punto $r$ la $rR$ perpendicolare ad $ML$. Descritto col centro $A$ e col raggio $tg$ il cerchio $EGF$ si conducano dal punto $R$ le tangenti $RE$, $RF$, si trovino gli alzati $e$, $f$ ed in seguito le prospettive $E'$, $F'$; si ripeta regolarmente la stessa operazione praticata pel punto $g$ per altri punti della curva $sgm$, e si continui finchè si ottenghino due punti, la cui prospettiva cada nel contorno già segnato, si aggiunga la prospettiva delle due basi $HPN$, $BDC$, e si avrà la figura cercata.

## OSSERVAZIONE.

La medesima costruzione serve egualmente per tutte le superficie di rotazione concave.

### *Dimostrazione.*

Per la natura delle tangenti potendosi il cerchio corrispondente al raggio $tg$ considerare come la base del cono $gtq$, ne siegue che i due punti $E$, $F$ determinati colla costruzione del Problema 1.° soddisferanno al caso proposto.

## PROBLEMA 13.°

Data la pianta e l'alzato della base toscana (Fig. 16), trovarne la prospettiva.

Si segni col Problema 2.° il contorno apparente del fusto della colonna, indi quello dell'imoscapo Problema 12.°, e col citato Problema 2.° e col Problema 4.°

si otterrà il contorno visibile della listella e del toro. Si mettino in prospettiva i trovati contorni colla base superiore del fusto, e colle due faccie del plinto corrispondenti alle $AC$, $AB$, e la sua base superiore, unendovi anche gli estremi di quelle ombre che cadono nella parte descritta, e l'ombra portata sul piano della pianta Problema XXXV M. P. e si avrà la prospettiva cercata.

## OSSERVAZIONE.

Colle medesime avvertenze si otterrà la prospettiva del capitello toscano o di qualunque altro corpo, data che ne sia la pianta e l'alzato.

## PROBLEMA 14.°

Trovare la prospettiva della (Fig. 17).

Si conduca dal punto $V$ la $VD$ paralella ad $AB$, indi $DD'$ paralella ad $ML$, e segata $D'Z$ eguale a $\nu R$, sarà $Z$ il punto dove concorreranno la prospettiva di tutti gli spigoli paralelli ad $AB$, così condotta $VE$ paralella ad $AC$, poi la $EE'$ paralella ad $ML$, e presa $E'X$ eguale anch' essa a $\nu R$, si avrà il punto $X$ nel quale concorreranno tutte le prospettive degli spigoli paralelli ad $AC$. Determinati i due punti $Z$, $X$, si operi nel resto colle regole esposte.

Questi due punti che sono interessantissimi negli usi pratici, si chiamano punti *accidentali*.

*Dimostrazione.*

Si suppongono condotti dal punto di vista tanti piani, che passino per tutti gli spigoli paralelli ad $AB$, e siccome si segheranno questi in una retta condotta dal medesimo punto e paralella alla stessa $AB$, così sarà $Z$ il punto richiesto.

## APPLICAZIONE DEL METODO GENERALE
### AL CASO DI UN QUADRO QUALUNQUE.

### PROBLEMA 15.°

Data la pianta $P$ (Fig. 18) e l'alzato $p$ di un punto, la pianta $V$ e l'alzato $v$ del punto di vista e la base $ABC$ di una superficie cilindrica retta, determinare la posizione della prospettiva del punto dato sulla superficie considerata.

Si conducano le due $VPB$, $vpb$, e dal punto $B$ la $Bb$ perpendicolare ad $ML$, e sarà $B$ la pianta e $b$ l'alzato del punto cercato.

### PROBLEMA 16.°

Trovare la prospettiva di un punto dato sulla superficie di un cono retto.

Sia $ARS$ (Fig. 19) la base del cono retto, i due punti $O$, $o$ la pianta e l'alzato del vertice del cono, e siano come antecedentemente $V$, $v$, $P$, $p$ la pianta e gli alzati del punto di vista e del punto dato.

Condotta la $VPRS$, si descriva l'alzato $rts$ cor-

rispondente alla pianta $RS$ (*). Si guidi $vpt$, e si tiri $tT$ perpendicolare ad $ML$, e sarà $T$ la pianta e $t$ l' alzato del punto richiesto.

## OSSERVAZIONE I.

Servirà la medesima costruzione per trovare la prospettiva di un punto dato sopra una superficie sferica.

## OSSERVAZIONE II.

Volendosi la prospettiva di uno dei solidi considerati nei Problemi 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, sopra una data superficie cilindrica, conica, sferica, si ripeterà per varj punti del contorno apparente, l' operazione praticata nei due Problemi antecedenti.

## DELLA PROSPETTIVA LINEARE DETERMINATA
### COL METODO DEI PUNTI DI CONCORSO.

Il metodo generale è facile a ritenersi applicabile a tutti i casi possibili e il solo che possa servire quando il quadro sia una superficie curva, con tutto ciò trattandosi di applicare, nel caso del quadro piano e verticale, la prospettiva all' architettura, ove

---

(*) Per descrivere l' alzato corrispondente alla sezione $RS$ (Fig. 20), si condurranno varie rette $mn$, $m'n'$ ec. paralelle ad $rs$, e fatto centro in $O$ coi raggi $xn$, $x'n'$ ec. si faranno dei cerchj concentrici, si troveranno gli alzati $d$, $e$ ec. dei punti $D$, $E$ ec., che uniti daranno l' alzato $rxs$ della sezione $RS$ cercata.

trovansi ordinariamente molte linee paralelle ed orizzontali, riesce più breve e più comodo il metodo accennato.

## PROBLEMA 17.°

Data la pianta $P$ di un punto (Fig. 21), e data la sua altezza o distanza dallo stesso punto $P$, trovarne la prospettiva nel piano dell' alzato.

Condotta al solito la $ML$, si fissi l' alzato $V$ del punto di vista, si tiri $EVG$ paralella ad $ML$, si conduca $VD$ perpendicolare ad $FG$ ed eguale alla distanza che ha il punto di vista dal punto $V$: si cali $PET$ perpendicolare ad $ML$ e dal medesimo punto $P$ si conduca qualunque retta $PN$, si guidi $DH$ paralella a $PN$, si facciano le $NO$, $ET$ eguali all' altezza data dal punto $P$, si uniscano i punti $O$, $H$ ed i punti $T$, $V$ e si avrà nell' intersezione $Q$ la prospettiva cercata.

La linea $ML$ si chiama *linea della Terra* od anche *base del quadro*, la $DV$ *raggio principale*, ed il punto $V$ *punto principale del quadro*. La retta $FG$ dicesi *linea d' orizzonte*, e prese le parti $VX$, $VY$ eguali a $VD$, i punti $X$, $Y$ chiamansi *punti di distanza*.

## OSSERVAZIONE I.

Se il punto $P$ si troverà nel piano della pianta, si unirà il punto $N$ col punto $H$, il punto $E$ col punto $V$ e si avrà in $R$ la prospettiva richiesta.

## OSSERVAZIONE II.

Nella prospettiva ottenuta col metodo considerato si suppone l' oggetto collocato sul piano della pianta al di dietro del piano del quadro.

*Dimostrazione.*

Supposto primieramente il punto $P$ nel piano della pianta, si facino rotare le due $DV$, $PE$ intorno ai punti $V$, $E$ in modo che la prima si disponga davanti il piano dell' alzato, e l' altra di dietro e perpendicolari entrambi al suddetto piano. In questa posizione supponendo unito il punto $D$, che coinciderà col punto di vista, col punto $P$, si avrà una retta che intersecherà la $VE$ nel punto cercato. Supponendo $R$ un tal punto si avranno i due triangoli $DVR$, $PER$ simili, e però dovrà essere $PE : DV :: ER : RV$ vale a dire che il punto cercato dovrà dividere la retta $EV$ in due parti proporzionali alle distanze $PE$, $DV$, ma questo si ottiene mediante la costruzione esposta, poichè risultando simili i triangoli $PEN$, $DVH$ ed $NRE$, $VRH$ si ha $PE : DV :: NE : VH$ ed $NE : VH :: ER : VR$ per cui $PE : DV :: ER : VR$; dunque la retta $EV$ resta divisa come volevasi.

La medesima dimostrazione serve egualmente per l' altro caso considerato; avvertendo che in quest' ipotesi la perpendicolare calata dal punto obbiettivo sul piano dell' alzato cadrà nel punto $T$, e che la paralella alla $DH$ condotta dallo stesso punto incontrerà in $O$ il piano dell' alzato.

## PROBLEMA 18.°

Data la pianta $ABCD$ (Fig. 22) ed il profilo $F'G'S'$ di una base toscana trovarne la prospettiva.

Fissate le linee $ML$, $ST$, il punto $R$ ed il punto

$V$ si tirino per questo le due $VS$, $VT$ ordinatamente paralelle alle due $AB$, $BC$ e si avranno i due punti $S$, $T$ nel primo de' quali concorreranno le prospettive di tutte le linee paralelle ad $AB$, e nell' altro le prospettive di quelle rette che saranno paralelle a $BC$. Si prolunghino le $AB$, $DC$, $CB$, $DA$ in $G$, $H$, $E$, $F$, si uniscano i punti $G$, $H$ col punto $S$ ed i punti $F, E$ col punto $T$, e si otterrà la prospettiva $abc$ della base inferiore del Plinto. Prese le parti $Gg$, $Hh$, $Ee$, $Ff$ eguali a $R'S'$, e uniti i punti $g$, $h$ col punto $S$ ed $e$, $f$ con $T$ si avrà la prospettiva $a'\ b'\ c'$ della base superiore. Condotte le rette $aa'$, $bb'$, $cc'$ le quali dovranno essere verticali (essendo la prospettiva di uno spigolo verticale sempre una retta verticale), si formerà l' intiera prospettiva del Plinto.

S' inscriva nella pianta della colonna il quadrato $NOPQ$, paralello ad $ABCD$, e si ripeta per questo l' operazione fatta per $ABCD$, prendendo le parti $Yy$, $Zz$, $Xx$, $Uu$ eguali tutte ad $A'M$ e si avranno i quattro punti $n$, $o$, $p$, $q$ appartenenti a quell' ellisse che marca la prospettiva della base superiore del fusto della colonna, e volendosi altri quattro punti del medesimo ellisse si condurranno pel centro $K$ due diametri paralelli ai lati $AB$, $BC$ e si circoscriverà il quadrato $N'\ O'\ P'\ Q'$ paralello all' inscritto eseguendo pei due diametri ciò che si è fatto per le rette $NO$, $OP$ e per il quadrato $N'O'P'Q'$ come per $NOPQ$, e l' intersezione del quadrato coi diametri daranno i punti richiesti. Ripetendo la stessa operazione per la sezione corrispondente al profilo

$B' C'$, e unendo gli estremi laterali dei due ellissi si avrà la prospettiva totale del fusto.

Per avere la prospettiva dell' imoscapo sarà duopo stabilire varie sezioni orizzontali, portarle in prospettiva colla regola già praticata, unendo convenientemente gli estremi di tali sezioni come si vede nella (Fig. 23), osservando però di terminare l'operazione quando le sezioni rientreranno nelle già avute. Le due basi della listella si avranno come la base superiore del fusto; ed il toro eseguendo ciò che si è superiormente detto per l' imoscapo. (Anche questa operazione si è resa visibile colla Fig. 24).

## OSSERVAZIONE I.

Fissata in pianta ed in profilo l' ombra propria della base, se ne avrà la prospettiva colla regola del Problema antecedente.

## OSSERVAZIONE II.

La parte visibile dell' oggetto considerato si desumerà dalla posizione del punto di vista, così essendo $R$ l' alzato di questo punto, saranno visibili per intiero le facce corrispondenti alle linee $AB$, $BC$.

### *Dimostrazione.*

Disposta la pianta ed il punto di vista come nella dimostrazione antecedente e richiamata quella del Problema 14.° si vedrà che $S$ è il punto di concorso di tutte le rette parallelle ad $AB$, e $T$ quello delle linee parallelle a $BC$ per cui

la prospettiva della linea *AG* posta nel piano della pianta sarà nella *SG*, e la prospettiva della *CE* nella *TE*, e però *b* sarà la prospettiva del punto *B*; così si dica degli altri punti *a*, *c*, ec.

Considerando poi come piano della pianta la base superiore del plinto e la base superiore del fusto, si renderanno manifeste le altre operazioni eseguite.

## PROBLEMA 19.°

Mettere in prospettiva un Capitello Toscano.

Stabilite le *ML*, *ST*, *VR* (Fig. 25), e condotte le *VS*, *VT* paralelle rispettivamente alle *AB*, *BC*, si operi pel quadrato *ABCD* come si è fatto pel quadrato *ABCD* della Fig. 22, osservando di prendere in questo caso le altezze corrispondenti al profilo *a*. Si ripeta la medesima operazione pei quadrati marcati in profilo *b*, *c*, indi colle varie sezioni si trovi la prospettiva dell' ovolo, della listella e del fusto della colonna.

Per avere la prospettiva degli spigoli corrispondenti al *bqc*, si segni l' estremo della retta *cq*, si trovi la prospettiva del quadrato corrispondente al punto *q*, e si operi similmente per altri quadrati fissati al dissopra del punto *q*, e si avrà con ciò la prospettiva degli spigoli corrispondenti al *bqc*.

## OSSERVAZIONE.

Alcune delle operazioni accennate si vedono eseguite nella citata Figura 25.

Ritenuta la medesima disposizione tanto del piano del quadro che dell' oggetto, come nelle figure relative al metodo generale, si trasporti il punto di vista ad una distanza tanto considerevole da potersi considerare paralelli i raggi visuali; la prospettiva che ne risulta in quest' ipotesi chiamasi paralella. Questa prospettiva facile ad eseguirsi si adopera vantaggiosamente per le macchine conservando la grandezza reale de' spigoli verticali.

## PROBLEMA 20.°

Data la pianta $A$ (Fig. 26) e l' alzato $a$ di un punto, e la direzione $LV$, $Lv$ dei raggi visuali, trovare la prospettiva paralella del punto dato.

Fissata come nel Problema 6.° la $DMf$ perpendicolare ad $ML$ e condotta la $M^1 D^1$, paralella ad $MD$, si tirino le $AN$, $af$ paralelle alle $LV$, $Lv$, indi $NN^1$ paralella ad $ML$ e segata la $N'P$ eguale ad $Mf$, sarà $P$ la prospettiva cercata.

## OSSERVAZIONE.

Se il punto dato sarà nel piano della pianta si condurrà $bg$ paralella ad $Lv$, e presa $N^1R$ eguale ad $Mg$ si avrà il punto $R$ richiesto.

Ordinariamente si stabilisce la direzione $LV$ paralella ad $ML$ ed $Lv$ che formi colla $ML$ un angolo di 22 gradi circa.

## PROBLEMA 21.°

Data la pianta $AFBG$, (Fig. 27) e l' alzato $agbf$ di un cerchio, la pianta $LV$, e l' alzato $Lv$ della direzione de' raggi visuali, trovare la prospettiva paralella del cerchio dato.

Condotte le tangenti $AC$, $BD$ e la $EH$ paralelle tutte ad $LV$, si fissino gli alzati $a$, $g$, $b$, dei punti $A$, $G$, $B$, e trovate col Problema antecedente le prospettive $A'$, $G'$, $B'$ dei suddetti punti $A$, $G$, $B$ si descriva colla regola data nel Problema 7.° l' ellisse $A'G'B'F'$ e sarà questa la prospettiva cercata.

## OSSERVAZIONE.

Se il cerchio dato sarà orizzontale, e la direzione de' raggi $NV'$, $L'v'$ come si è detto nell' osservazione del Problema antecedente l' ellisse $A'G'B'F'$ si descriverà colla regola del Problema III M. P.

## PROBLEMA 22.°

Data la pianta e l' alzato (Fig. 28) di un cilindro qualunque come nel Problema 2.°, e data la direzione $L'V$, $Lv$ dei raggi visuali, trovarne la prospettiva paralella.

Fissati i punti corrispondenti $L$-$L'$, e $V$-$v$ si tirino le $VH$, $vh$ paralelle ai lati $RS$, $rs$: indi $hH$ perpendicolare ad $ML$ ed unito il punto $H$ col punto $L'$ si conducano le tangenti $AT$, $BX$ paralelle ad $L'H$, e dai punti di contatto le $AC$, $BD$

paralelle ad *R S* che assieme al cerchio *D S C* e all' arco *B N A* costituiranno la pianta del contorno apparente. L' alzato del medesimo contorno si otterrà colle solite regole generali: determinato così il contorno apparente, si segnerà colle regole esposte nei due Problemi antecedenti la prospettiva delle rette *A C*, *B D*, della base superiore *D C S* e dell' arco *B N A*, e si avrà la prospettiva richiesta.

## OSSERVAZIONE.

La regola praticata per determinare il contorno apparente del cilindro dato è quella del Problema I. M. P. ed il Problema II. M. P. servirà per trovare il contorno apparente del cono; e coi Problemi IV, V, VI, VII, VIII ec. M. P. si otterrà il contorno apparente della sfera, del toro, dell' ovolo, di una superficie di rotazione qualunque, di un canale ec., e quindi se ne avrà la prospettiva come pel cilindro.

## DELLA RICERCA DEL PUNTO DI VISTA
### IN UNA DATA PROSPETTIVA.

### PROBLEMA 23.°

Data la prospettiva *A D F G* di un quadrato orizzontale (Fig. 29), trovarne il punto principale ed i punti di distanza.

Si prolunghino i lati *A G*, *D F* ed *F G*, *D A* nei punti di concorso *E*, *H*; si descriva sul diametro *H E* il cerchio *H P E R*, si conduca la diagonale *D G M* e pel céntro *O* la perpendicolare *O R*. Si

guidi la $RMP$, e la perpendicolare $PV$, e sarà $V$ il punto principale, e descritti due archi col centro $V$ e raggio $VP$ si otterranno i punti $X$, $Y$ di distanza.

## OSSERVAZIONE I.

Nel caso che i due punti di concorso si trovino fuori dell' estensione del piano sul quale devesi eseguire la figura, si rende impraticabile la costruzione superiormente esposta, ed in tale ipotesi condotta qualunque retta $xy$ (Fig. 30) paralella alla linea d'orizzonte $XY$ si eseguirà per la $xy$ la regola data affine di ottenerne il supposto punto principale $v$, ed i supposti punti di distanza $x$, $y$ che uniti col punto $D$ mediante le rette $DvV$, $DxX$, $DyY$ daranno i punti $V$, $X$, $Y$ cercati (*).

## OSSERVAZIONE II.

Se invece di un quadrato sarà data la prospettiva di un paralellepipedo rettangolo a base quadrata ed orizzontale, come sarebbe il plinto nella base o la cimasa nel capitello, servirà la medesima costruzione a determinare il suo punto di vista.

### *Dimostrazione.*

Supponendo unito il punto di vista coi due punti di concorso $H$, $E$ e col punto $M$, si dovranno avere tre linee oriz-

---

(*) Le semplici costruzioni esposte nel Problema 23 e nell' osservazione I. dello stesso Problema sono del Sig. Francesco Durelli Membro dell' I. R. Accademia di Milano.

zontali che formino due angoli semiretti; ora essendo gli angoli *H P M*, *E P M* misurati dalla metà degli archi *H R*, *R E* saranno semiretti; dunque fatto rotare il triangolo *H P E* intorno alla *H E* in modo che sia perpendicolare al piano del quadro, il punto *P* coinciderà col punto di vista, ed il punto *V* sarà il punto principale come si è detto.

## PROBLEMA 24.°

Data la prospettiva *C A B G E F* (Fig. 31) di una fabbrica avente per base un rettangolo, e conoscendosi per esempio dal numero delle finestre che il lato *AB* contiene tre parti, ed il lato *AC* due parti, trovare il suo punto principale.

Si prolunghino i lati *AC*, *EF* ed *AB*, *EG* onde avere i punti di concorso *P*, *Q*, si descriva sul diametro *P Q* il cerchio *P R Z*. Si faccia il rettangolo *Q N M K* in modo che il lato *Q N* contenga tre parti arbitrarie, ed il lato *Q K* due delle stesse parti, si tiri la diagonale *Q M Z* e le rette *B P*, *C Q*, indi l' altra diagonale *A D H*: fatto ciò si guidi la *Z H R*, e si cali la perpendicolare *R V*, e sarà *V* il punto principale cercato.

## OSSERVAZIONE.

Se in luogo delle finestre vi fossero rosoni, colonne od altro, serviranno egualmente per trovare la corrispondenza fra i lati della base del rettangolo.

### *Dimostrazione.*

Supponendo unito il punto di vista coi punti di concorso *Q*, *H*, *P* si avranno tre linee orizzontali che formeranno fra loro due angoli eguali ad *N Q M*, *M Q K*, e per essere eguali

gli angoli $ZQP$, $PRZ$ che s' appoggiano sul medesimo arco, saranno pure eguali i complementi $MQN$, $ZRQ$; per cui disposto il triangolo $PRQ$ come nella dimostrazione precedente, il punto $R$ coinciderà col punto di vista, ed il punto $V$ sarà il cercato.

## PROBLEMA 25.°

Data la prospettiva $NGHO$ di un paralellepipedo rettangolo, le cui basi non sieno orizzontali, trovarne il punto principale.

Si prolunghino $GF$, $PN$, $LO$ indi $GH$, $PL$, $NO$, e così $NF$, $PG$, $LH$ e si avranno i tre punti $A$, $C$, $B$ che uniti formeranno il triangolo $ACB$, si calino le $BX$, $AS$ perpendicolari alle $AC$, $BC$, e si otterrà il punto principale $V$.

Descritto sulla $BX$ il semicerchio $XRB$, e condotta $VR$ paralella ad $XC$, sarà questa eguale alla distanza del punto di vista al punto principale $V$.

### *Dimostrazione.*

Invece del triangolo $ABC$ della Fig. 32 si consideri il suo eguale $ABC$ della Fig. 33, e poichè le rette che uniscono il punto di vista coi punti $A$, $B$ formano angolo retto, si troverà questo nell' emisfero del semicerchio $BXA$, e per la medesima ragione sarà anche nell'emisfero del semicerchio $CXB$, e quindi nel semicerchio del diametro $BX$; egualmente si proverà che il suddetto punto cercato dovrà essere nella sezione $AS$, per cui la sua projezione sarà $V$, e siccome gli angoli $ASC$, $BXC$ sono retti, così il punto $V$ resterà determinato dalle perpendicolari $BX$, $AS$ come si è detto; trovandosi poi il punto di vista nel semicircolo del diametro $BX$, sarà evidentemente la sua distanza eguale alla $VR$ Fig. 31.

FINE.

Tav. I
Fig. 1
2
3
4
5

Tav 13
17
16
X
Z

Tav. V
18
19
20
21
22
24
25
26

Tav. VI
25
27
28
29
30
31
32
33